附录 拉氏变换与反变换

一、拉氏变换的定义

二、常用函数的拉氏变换

三、拉氏变换的基本性质与定理

四、拉氏反变换

五、线性定常微分方程拉氏变换求解

1

一、拉氏变换的定义

函数f(t)满足 ***f(t)=0 (t<0)***

f(t)连续 (t>=0) (积分存在)

$$F(s)=\int_{0^-}^{+\infty} f(t)e^{-st}dt \qquad F(s)=L[f(t)]$$

F(s)是**f(t)**的拉普拉斯变换。简称拉氏变换。

f(t)称为 **F(s)**的拉氏逆变换。记为：

$$f(t)=L^{-1}[F(s)]$$

2

二、常用函数的拉氏变换

1、单位脉冲函数 $L[\delta(t)]=1$

$$\delta(t)=\begin{cases}\infty(t=0)\\0(t\neq 0)\end{cases}\text{且}\int_{0^-}^{0^+}\delta(t)dt=1$$

$$F(s)=\int_0^\infty \delta(t)e^{-st}dt=\int_{0_-}^{0_+}\delta(t)dt=1$$

3

2.单位阶跃函数

$$f(t)=\begin{cases}0(t<0)\\1(t\geq 0)\end{cases}=1(t)(t\geq 0)\quad L[1(t)]=\frac{1}{s}$$

$$F(s)=\int_0^\infty 1(t)e^{-st}dt=-\frac{1}{s}e^{-st}\Big|_0^\infty=\frac{1}{s}$$

4

3. 单位斜坡函数

$$f(t)=\begin{cases}0(t<0)\\ t(t\geq 0)\end{cases}$$

$$L[t]=\frac{1}{s^2}$$

4.加速度函数

$$f(t)=\begin{cases}0(t<0)\\ \frac{1}{2}t^2(t\geq 0)\end{cases}$$

$$L[\frac{1}{2}t^2]=\frac{1}{s^3}$$

时间域： δ(t)→ 1(t)→t→ $t^2/2$

复数域： 1→1/s→$1/s^2$→$1/s^3$

4.指数函数

$$f(t)=e^{-at}(t\geq 0)$$

$$L[e^{-at}]=\frac{1}{s^3}$$

$$F(s)=\int_0^\infty e^{-at}e^{-st}dt=\int_0^\infty e^{-(a+s)t}dt=-\frac{1}{s+a}e^{-(s+a)t}\Big|_0^\infty=\frac{1}{s+a}$$

5、其它函数的拉氏变换

P272 附表1

f(t)	F(s)	f(t)	F(s)
δ (t)	1	sinwt	$w/(s^2+w^2)$
1(t)	1/s	coswt	$s/(s^2+w^2)$
t	$1/s^2$	$e^{-at}\sin wt$	$\frac{w}{(s+a)^2+w^2}$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$	$e^{-at}\cos wt$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+w^2}$

三、拉氏变换的基本性质与定理

(1) 线性定理

若：$L[f_1(t)]=F_1(s),$

$L[f_2(t)]=F_2(s)$

则

$$L[af_1(t)+bf_2(t)]=aL[f_1(t)]+bL[f_2(t)]$$

(2) 微分定理

若 $L[f(t)] = F(s)$

则有 $L[f'(t)] = sF(s) - f(0)$

f(0)为原函数f(t) 在t=0时的初始值。

$L[f''(t)] = s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$

$L[f^n(t)] = s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \cdots - f^{n-1}(0)$

9

证：根据拉氏变换的定义有

$$L[f'(t)] = \int_0^{+\infty} f'(t)e^{-st}dt = s\int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt + f(t)e^{-st}\Big|_0^{+\infty}$$

$$= sF(s) - f(0)$$

原函数二阶导数的拉氏变换

$$L[f''(t)] = sL[f'(t)] - f'(0) = s[sF(s) - f(0)] - f'(0)$$

$$= s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$$

依次类推，可以得到原函数n阶导数的拉氏变换 $L[f^n(t)] = s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \cdots - f^{n-1}(0)$

10

(3) 积分定理

若 $$L[f(t)]=F(s)$$

则 $$L[\int_{0^-}^{\infty} f(t)dt]=\frac{F(s)}{s}+\frac{f^{-1}(0\ )}{s}$$

$$L[\iint f(t)dt^2]=\frac{1}{s^2}F(s)+\frac{1}{s^2}f^{(-1)}(0)+\frac{1}{s}f^{(-2)}(0)$$

注意：$f^{(-n)}(0)$ 为 $f(t)$ 的 n 重积分在 $t=0$ 的值

证明：

$$L[h'(t)]=sL[h(t)]-h(0)$$

$$\therefore L[h(t)]=\frac{1}{s}L[h'(t)]+\frac{1}{s}h(0)=\frac{1}{s}L[f(t)]+\frac{1}{s}h(0)$$

$$=\frac{1}{s}F(s)+\frac{1}{s}f^{-1}(0)$$

（4）终值定理

若 $L[f(t)]=F(s)$ ，且由f(∞)存在，则

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = f(\infty) = \lim_{s\to 0} sF(s)$$

原函数的终值等于其象函数乘以s的初值。

注：若 t→∞ 时f(t)极限∞ 不存在，则不能用终值定理。如对正弦函数和余弦函数就不能用终值定理。

13

终值定理证明：由微分定理，有

$$L[f'(t)] = \int_0^\infty f'(t)e^{-st}dt = sF(s) - f(0)$$

等式两边对s趋向于0取极限

$$左边 = \lim_{s\to 0}\int_0^\infty f'(t)e^{-st}dt = \int_0^\infty \lim_{s\to 0} f'(t)e^{-st}dt$$

$$= \int_0^\infty f'(t)dt = f(t)\Big|_0^\infty = \lim_{t\to\infty} f(t) - f(0)$$

$$右边 = \lim_{s\to 0}[sF(s) - f(0)] = \lim_{s\to 0} sF(s) - f(0)$$

$$\therefore \lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s)$$

14

(5)初值定理

若 f(t) 在t=0⁺处有初值f(0⁺)，则

$$\lim_{t\to 0^+} f(t) = f(0^+) = \lim_{s\to\infty} sF(s)$$

证明方法同上。只是要将s→∞取极限。

(6) 衰减定理

若$f_2(t)=e^{-at} f_1(t)$, 则

$F_2(s) = F_1(s+a)$

$$L[e^{-at} f(T)] = F(s+a)$$

(7) 延迟定理 （处理复杂时间函数）

若 $f_2(t)=f_1(t-a)$， 则

$F_2(s)=e^{-as}F_1(s)$

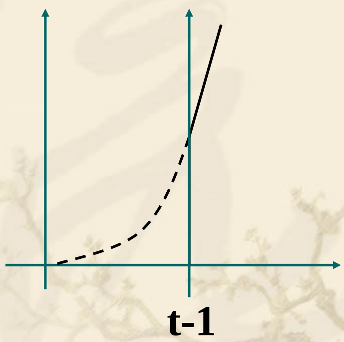
$$L[f(t-\tau)]=e^{-\tau\cdot s}F(s)$$

例 求$t^2\bullet 1(t-1)$的拉氏变换

$t^2\bullet I(t-1)=(t-1+1)^2\bullet I(t-1)=(\tau+1)^2$ （$\tau=t+1$）

$=\tau^2+2\tau+1$ （$\tau\geqslant 0$）

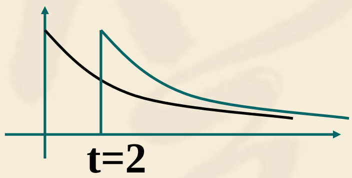
$$F(s)=(\frac{2}{s^3}+\frac{2}{s^2}+\frac{1}{s})e^{-s}$$



例

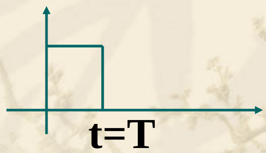
求G(s)=e^{-2s}/(s+1)对应的时域函数

g(t)=e$^{-(t-2)}$ • I(t-2)



零阶保持器：离散到连续p232

H(s)=1/s－e^{-Ts}/s



19

(8)时间比例尺定理

原函数在时间上收缩（或展宽）若干倍，则象函数及其自变量都增加（或减小）同样倍数。即：

$$L[f(\frac{t}{a})] = aF(as)$$

证：

$$L[f(\frac{t}{a})] = \int_0^\infty f(\frac{t}{a})e^{-st}dt,\ 令 t/a = \tau,$$

$$则原式 = \int_0^\infty f(\tau)e^{-sa\tau}ad\tau = aF(as)$$

20

(9) 卷积定理

$$f_1(t)*f_2(t)=\int_0^t f_1(t-\tau)f_2(\tau)d\tau$$

$$L(f_1(t)*f_2(t))=F_1(s)\bullet F_2(s)$$

两个原函数的卷积的拉氏变换等于两个象函数的乘积。

证明：

$$L[\int_0^t f_1(t-\tau)f_2(\tau)d\tau]=\int_0^\infty[\int_0^t f_1(t-\tau)f_2(\tau)d\tau]e^{-st}dt$$

$$\because \tau>t\text{时}, f_1(t-\tau)\cdot 1(t-\tau)=0$$

$$\therefore \int_0^t f_1(t-\tau)f_2(\tau)d\tau=\int_0^\infty f_1(t-\tau)\cdot 1(t-\tau)\cdot f_2(\tau)d\tau$$

$$L\left[\int_0^t f_1(t-\tau)f_2(\tau)d\tau\right]$$

$$=\int_0^\infty\left[\int_0^\infty f_1(t-\tau)1(t-\tau)f_2(\tau)d\tau\right]e^{-st}dt$$

$$=\int_0^\infty f_2(\tau)d\tau\int_0^\infty f_1(t-\tau)1(t-\tau)e^{-st}dt$$

$\because$ 令 $t-\tau=\zeta$，则

$$L\left[\int_0^t f_1(t-\tau)f_2(\tau)d\tau\right]$$

$$=\int_0^\infty f_2(\tau)d\tau\int_0^\infty f_1(\zeta)e^{-s(\tau+\zeta)}d\zeta$$

$$=\int_0^\infty f_2(\tau)e^{-s\tau}d\tau\int_0^\infty f_1(\zeta)e^{-s\zeta}d\zeta=F_2(s)F_1(s)$$

- **主要定理L[f(t)]=F(s)**

1）叠加定理 L[af1+bf2]=aF1+bF2

2）微分定理 L[f ']=sF-f(0) 初始条件

$L[f^{n}]=s^nF(s)-s^{n-1}f(0)-s^{n-2}f'(0)-\ldots-f^{(n-1)}(0)$

3）积分定理 $L[\int f dt]=F(s)/s+\int f dt\big|_{t=0}/s$

不定积分常数项初始条件

4）延迟定理 **$L[f(t-T)]=e^{-sT}F(s)$**

5) 衰减定理 $L[e^{-at}f(t)]=F(s+a)$

❖ 主要定理L[f(t)]=F(s)

6)初值定理 $\lim f(t)|_{t=0}=\lim sF(s)|_{s=00}$ 条件:存在

7)终值定理 $\lim f(t)|_{t=00}=\lim sF(s)|_{s=0}$ 条件:存在

8)时间比例变换 L[f(t/a)]=aF(as)

9)卷积定理 L[f*g]=F(s)G(s)

$f*g=\int_0^t f(t-x)g(x)dx=\int_0^t f(x)g(t-x)dx$

10)时乘变换 L[tf(t)]=-dF(s)/ds

25

四、拉氏反变换

1. 定义：F(s)求f(t) t>0

$$f(t)=L^{-1}[F(s)]=\frac{1}{2\pi\cdot j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty}F(s)e^{st}ds$$

26

2、 求 f(t) 的方法

- 按定义
- 直接查表
- 分解F(s)法

27

例1: $F(s)=\dfrac{1}{(s+a)(s+b)}=\dfrac{1}{b-a}\left(\dfrac{1}{s+a}-\dfrac{1}{s+b}\right)$

则$f(t)=\dfrac{e^{-at}-e^{-bt}}{b-a}$

例2: 求 $F(s)=\dfrac{1}{s^2(s+1)}$ 的逆变换。

解: $F(s)=\dfrac{1}{s^2(s+1)}=\dfrac{1}{s^2}-\dfrac{1}{s}+\dfrac{1}{s+1}$

$f(t)=L^{-1}[F(s)]=t-1+e^{-t}$

28

例3. $F(s)=\dfrac{1}{s(s-1)^2}$的逆变换

解： $F(s)=\dfrac{a}{s}+\dfrac{b}{s-1}+\dfrac{c}{(s-1)^2}$

则$a(s-1)^2+bs(s-1)+cs=1$

对应项系数相等得 $a=1, b=-1, c=1$

$\therefore\ F(s)=\dfrac{1}{s}+\dfrac{-1}{s-1}+\dfrac{1}{(s-1)^2}$

$\therefore\ f(t)=1-e^t+te^t$

29

3、简化分解F(s)

有理式 $F(s)=\dfrac{B(s)}{A(s)}=\dfrac{b_0s^m+b_1s^{m-1}+\cdots+b_m}{a_0s^n+a_1s^{n-1}+\cdots+a_n}\qquad(m\le n)$

定义: F(s) 的零点是B(s)=0的解 z_j

F(s)的极点是A(s)=0的解 p_i

A(s)=0是F(s) 的特征方程。

对A(s)进行分解：A(s)=(s+p_1)…(s+p_n)

30

$$F(s)=\frac{B(s)}{A(s)}$$

$$=k(m=n)+\frac{b_0s^m+b_1s^{m-1}+\ldots+b_{m-1}s+b_m}{s^n+a_1s^{n-1}+\ldots+a_{n-1}s+a_n}(n>m)$$

$$=k+\frac{r(s)}{(s-p_r)^r}(r\text{重根})+\sum_{i=r+1}^{n}\frac{A_i}{s-p_i}(\text{互不相同的根})$$

$$=k+\frac{r(s)}{(s-p_r)^r}(r\text{重根})+\sum_{j=1}^{l}\frac{A_{l1}s+A_{l2}}{s^2-w_j^2}(\text{共轭复根})$$

$$+\sum_{i=r+2l}^{n}\frac{A_i}{s-p_i}(\text{互不相同的根})$$

- **1极点计算(<u>分母多项式(特征方程)求根</u>)**
- **2)待定系数法（多元一次方程）**
- **3)公式;**
- **4）配方法;**
- 欧拉公式

$(e^{jwt}=\cos wt+j\sin wt)$ $\cos wt=(e^{jwt}+e^{-jwt})/2$

a. A(s)=0　全部为不同的单极点

$$F(s)=\frac{c_1}{s+p_1}+\frac{c_2}{s+p_2}+\cdots+\frac{c_n}{s+p_n}$$

$$(c_k=[F(s)(s+p_k)]_{s=-p_k})$$

C_k称为F(s)在极点s=-p_k的留数值

$$例4: F(s)=\frac{1}{(s+1)(s-2)(s+3)}$$

$$=\frac{c_1}{s+1}+\frac{c_2}{s-2}+\frac{c_3}{s+3}$$

$$c_1=[\frac{1}{(s+1)(s-2)(s+3)}\cdot(s+1)]_{s=-1}=-\frac{1}{6}$$

$$c_2=[\frac{1}{(s+1)(s-2)(s+3)}\cdot(s-2)]_{s=2}=\frac{1}{15}$$

$$c_3 = [\frac{1}{(s+1)(s-2)(s+3)} \cdot (s+3)]_{s=-3} = \frac{1}{10}$$

$$\therefore F(s) = -\frac{1}{6}\frac{1}{s+1} + \frac{1}{15}\frac{1}{s-2} + \frac{1}{10}\frac{1}{s+3}$$

$$\therefore f(t) = -\frac{1}{6}e^{-t} + \frac{1}{15}e^{2t} + \frac{1}{10}e^{-3t}$$

35

b. A(s)=0　　含有共扼复数极点时

$$F(s) = \frac{c_1 s + c_2}{(s+p_1)(s+p_2)} + \frac{c_3}{s+p_3} + \cdots + \frac{c_n}{s+p_n}$$

$$[c_1 s + c_2]_{s=-p_1} = [F(s)(s+p_1)(s+p_2)]_{s=-p_1}$$

36

例5

$$F(s)=\frac{s+5}{s^2+4s+5}=\frac{s+5}{(s+2)^2+1}=\frac{s+2+3}{(s+2)^2+1}$$

$$=\frac{s+2}{(s+2)^2+1}+\frac{3}{(s+2)^2+1}$$

$$\therefore y=e^{-2t}\cos t+3e^{-2t}\sin t$$

c. A(s)=0　　含有重根

$$F(s)=\frac{c_r}{(s+p_1)^r}+\frac{c_{r-1}}{(s+p_1)^{r-1}}+\cdots+\frac{c_1}{(s+p_1)}+\frac{c_{r+1}}{(s+p_{r+1})}+\cdots+\frac{c_n}{(s+p_n)}$$

$$c_r=[F(s)(s+p_1)^r]_{s=-p_1}$$

$$c_{r-1}=\{\frac{d}{ds}[F(s)(s+p_1)^r]\}_{s=-p1}$$

$$c_{r-j}=\frac{1}{j!}\{\frac{d^j}{ds^j}[F(s)(s+p_1)^r]\}_{s=-p1}$$

$$c_1=\frac{1}{(r-1)!}\{\frac{d^{r-1}}{ds^{r-1}}[F(s)(s+p_1)^r]\}_{s=-p_1}$$

其余各极点的留数确定方法同上。

d. 用MATLAB进行分解

$$F(s)=\frac{B(s)}{A(s)}=\frac{r_1}{s+p_1}+\frac{r_2}{s+p_2}+\cdots+\frac{r_n}{s+p_n}+k$$

MATLAB命令：

- [r,p,k]=residue[num,den]
- [num,den]=residue[r,p,k]

例6：

$$F(s)=\frac{s+2}{s(s+3)(s+1)^2}$$

$$F(s)=\frac{\frac{1}{12}}{s+3}+\frac{-\frac{3}{4}}{s+1}+\frac{-\frac{1}{2}}{(s+1)^2}+\frac{\frac{2}{3}}{s}$$

解：用Matlab

```
>> num=[1 2];
>> den=conv(conv([1 0],[1 3]),conv([1 1],[1 1]));
>> [r,p,k]=residue(num,den)

r =

    0.0833
   -0.7500
   -0.5000
    0.6667


p =

   -3.0000
   -1.0000
   -1.0000
         0


k =

     []
```

4、拉氏反变换求 f(t)

a. $$F(s)=\frac{c_1}{s+p_1}+\frac{c_2}{s+p_2}+\cdots+\frac{c_n}{s+p_n} \qquad (p_i \neq p_j)$$

$$L^{-1}[\frac{1}{s+p_i}]=e^{-p_i t}$$ 称系统自由运动模态

$$f(t)=c_1e^{-p_1 t}+c_2e^{-p_2 t}+\cdots+c_ne^{-p_n t}$$

b. F(s) 含有重根

$$F(s)=\frac{c_r}{(s+p_1)^r}+\frac{c_{r-1}}{(s+p_1)^{r-1}}+\cdots+\frac{c_1}{(s+p_1)}$$

模态:

$$e^{-p_1 t},te^{-p_1 t},t^2e^{-p_1 t},\cdots,t^{r-2}e^{-p_1 t},t^{r-1}e^{-p_1 t}$$

$$f(t)=c_1e^{-p_1 t}+c_2te^{-p_1 t}+\cdots+c_{r-1}t^{r-2}e^{-p_1 t}+c_rt^{r-1}e^{-p_1 t}$$

c. F(s)中含有共轭复根

设s= σ ±j ω

模态: $e^{\sigma}\sin\omega t, e^{\sigma}\cos\omega t$

$$f(t)=c_1e^{\sigma}\cos\omega t+c_2e^{\sigma}\sin\omega t$$

五 线性定常微分方程求解（拉氏变换法）

❖ 微分方程解　　　　　　　　　　　　解的拉氏变换

(原函数）←←反变换←部分分式展开　(象函数)

待定系数法p63　　　　　　　　　解代数方程

微分方程→带入初始条件拉氏变换→→象函数代数方程

步骤：

1. 对微分方程两端进行拉氏变换；
2. 求输出量拉氏变换函数表达式；
3. 用拉氏反变换求输出量时间表达式。

例7：求解微分方程

$$y''+4y'+5y=0, y(0)=y'(0)=1$$

对微分方程两端进行拉氏变换，代入初始条件

$$s^2F(s)+4sF(s)+5F(s)-(s+4)f(0)-f'(0)=0$$

$$\therefore F(s)=\frac{s+5}{s^2+4s+5}=\frac{s+5}{(s+2)^2+1}=\frac{s+2+3}{(s+2)^2+1}$$

$$=\frac{s+2}{(s+2)^2+1}+\frac{3}{(s+2)^2+1}$$

$$\therefore y=e^{-2t}\cos t+3e^{-2t}\sin t$$

例8 $y^{(3)}+3y''+3y'+y=1, y(0)=y'(0)=y''(0)=0$

两边拉氏变换得：

$$F(s)=\frac{1}{s(s+1)^3}=\frac{b_3}{(s+1)^3}+\frac{b_2}{(s+1)^2}+\frac{b_1}{s+1}+\frac{c_4}{s}$$

$$b_3=[\frac{1}{s(s+1)^3}(s+1)^3]_{s=-1}=-1$$

$$b_2=\left\{\frac{d}{ds}[\frac{1}{s(s+1)^3}(s+1)^3]\right\}_{s=-1}=[\frac{d}{ds}(\frac{1}{s})]_{s=-1}$$

$$=(-s^{-2})\Big|_{s=-1}=-1$$

$$b_1 = \frac{1}{2!}(2s^{-3})\Big|_{s=-1} = -1$$

$$c = \frac{1}{s(s+1)^3}s\Big|_{s=0} = 1$$

$$F(s) = \frac{1}{s} + \frac{-1}{(s+1)^3} + \frac{-1}{(s+1)^2} + \frac{-1}{s+1}$$

$$\Rightarrow y = 1 - \frac{1}{2}t^2e^{-t} - te^{-t} - e^{-t}$$

- 如果不记公式,可用待定系数法分解

$$F(s) = \frac{1}{s(s+1)^3} = \frac{a}{s} + \frac{b_1}{(s+1)^3} + \frac{b_2}{(s+1)^2} + \frac{b_3}{s+1}$$

$$\therefore a(s+1)^3 + b_1 s + b_2(s+1)s + b_3 s(s+1)^2 = 1$$

$$\therefore as^3 + b_3 s^3 + (3a + b_2 + 2b_3)s^2$$

$$+(3a + b_1 + b_2 + b_3)s + a = 1$$

$$\therefore a = 1, b_1 = -1, b_2 = -1, b_3 = -1$$

例9: $\frac{d^2y}{dt^2}+5\frac{dy}{dt}+6y(t)=6x(t)$

已知: $y(0^-)=y'(0^-)=2, x(t)=1(t)$,求y(t) 。

解: 方程两端求拉氏变换

$$[s^2Y(s)-sy(0^-)-y'(0^-)]+5[sY(s)-y(0^-)]$$
$$+6Y(s)=6X(s)$$

代入已知的初始条件

$$Y(s)=\frac{6}{s^2+5s+6}X(s)+\boxed{\frac{6s+12}{s^2+5s+6}}$$

零输入响应

零状态响应

$$=\boxed{\frac{6}{(s^2+5s+6)s}}+\frac{6s+12}{s^2+5s+6}$$

$$=\frac{1}{s}+\frac{-3}{s+2}+\frac{2}{s+3}+\frac{8}{s+2}+\frac{-6}{s+3}$$

$$y(t)=1(t)+5e^{-2t}-4e^{-3t}$$

输入模态
稳态响应

强制分量

自由运动模态
动态响应

解的组成分析

解 ＝零状态响应+零输入响应

＝稳态响应+暂态响应＝强制+系统自由分量

解的分量运动形式组成决定于特征方程的根。

❖ 作业

拉氏变换/反变换（定义域）

1. $f(t)=(5t^2+4\cos wt+3\sin wt+2e^{-2t}+1)\,\delta(t)+2*I(t-1)+t*I(t-2)$
2. $f(t)=\sin(3t-\pi/4)*I(t-\pi/4)$
3. $f(t)=e^{-8t}(\cos 6t+1/3*\sin 6t)$
4. $G(s)=(s+c)/((s+a)(s+b))$
5. $G(s)=e^{-s}/(s-2)$

解下列微分方程

1. $x''(t)-x(t)=4\sin t+5\cos 2t$, $x(0)=2, x'(0)=1$
2. $x'''(t)+3x''(t)+3x'(t)+x(t)=1$, $x(0)=x'(0)=x''(0)=1$